Süpersimetriye giriş : 1 boyutta süpersimetri, süpercebir ve süperuzay

Kayhan ÜLKER

Abbasağa Mah., İstanbul

UluYef'12

Süpersimetriye giriş :
1 boyutta süpersimetri, süpercebir ve süperuzay

Kayhan ÜLKER

Abbasağa Mah., İstanbul

UluYef'12

Süpersimetrinin Gelişimi

Simetri fizikte önemli bir yer tutar ve matematiksel olarak simetri grup teorisi ile formüle edilir!
Örneğin (3+1) boyutlu uzay zamanda kuantum alan teorisinin simetri grubu

$$\text{Poincare} \equiv \text{dönme } (J_{\mu\nu}) + \text{öteleme } (P_\mu),\ \mu,\nu = 0,1,2,3)$$

grubudur. Bu grup üreteçleri bir Lie cebri oluşturur :

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}J_{\mu\rho} + \eta_{\mu\sigma}J_{\nu\rho})$$
$$[P_\mu, J_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\rho\mu}P_\sigma - \eta_{\sigma\mu}P_\rho)\,,\ [P_\mu, P_\nu] = 0$$

Diğer taraftan diğer ek simetriler (yük, isospin gibi iç simetriler) skaler üreteçler (Ω) tarafından üretilebilir

- 1967 Coleman-Mandula no-go teoremi:
  Poincare grubunu $(P_\mu, J_{\mu\nu})$ trivial olmayan bir şekilde genişletmek mümkün değil trivial (değersiz) olan yöntem : $[P_\mu, \Omega] = 0 = [J_{\mu\nu}, \Omega]$)

- 1971 Golfand-Likhtman - SUSYnin doğuşu
  Eğer bir Lie grubu dereceli (graded) yapıya sahipse Poincare grubunu genişletmek mümkün olur
  $\Rightarrow$ Süpercebir (Z_2 dereceli yapı)

$$SUSY \; : \; Fermiyon \rightarrow Bozon \, , \; Bozon \rightarrow Fermiyon$$

- 1974 Wess-Zumino Modeli
  4-boyutta ilk renormalize edilebilir teori $\Rightarrow$ SUSY popüler olmaya başlıyor !
- 1975 Haag-Lopusanski-Sohnius
  Relativistik Kuantum Alan Teorisinin 4-boyutta mümkün olan tutarlı tek genişletilmesi sadece Poincare + SUSY cebri ile mümkündür.

.

- 1975-2012 • • •

.

- 1975-2012• • •

- 2012 *find k supersymm* @SPIRES ⇒yaklaşık 55000 makale !
  (Sadece 2012'de Şubat başına kadar 115 makale.)

- 1975-2012• • •

- 2012 *find k supersymm* @SPIRES ⇒yaklaşık 55000 makale !
  (Sadece 2012'de Şubat başına kadar 115 makale.)

- 2013 LHC ⇒???

  (LHC : Large Hadron Collider - Büyük Hadron Çarpıştırıcısı)

Süpersimetrinin Diğer Uygulamaları

Süpersimetri fikri sadece yüksek enerji fiziğine özgü değildir ! Özellikle 1981'de Witten'ın 1-boyutlu supersimetrik modeli inşa etmesinden sonra süpersimetri

- kuantum mekaniği,
- istatistik fizik,
- yoğun madde fiziği

konularının günümüzde de yoğun olarak çalışılan en temel araçlarından biri olmuştur.

Süpersimetrinin Temel Özellikleri

Süpersimetrik bir kuantum alan teorisi süpersimetri altında dönüşen alanlar ve bu simetri altında değişmez kalan bir Eylem ile tutarlı olarak ifade edilebilir. Dolayısıyla süpersimetrik teorilerin yapıları oldukça kısıtlanmıştır :

- Bozonlar ve fermionlar sadece spin-1/2 fermiyonik simetri operatorleri Q ile birbirlerine dönüştürülebilir.

$$Q|fermiyon>=|bozon> \quad , \quad Q|bozon>=|fermiyon>$$

- Sadece süpersimetri sayesinde birbirlerine dönüşen farklı spinli fermiyon ve bozonlar tek bir (süper) simetri çoklusunun elemanları olarak yazılabilir.
  - Herhangi bir süperçokluda fermiyon ve bozon sayıları eşittir.
  - Aynı çokluya ait olan tüm fermiyon ve bozon alanları aynı kütleye ve aynı bağlanma sabitine sahiptir.

Süpersimetrik bir teorinin eylemi iki farklı yolla yazılabilir.

- Bileşen (component) alan formülasyonu :
  - Eylemin sahip olması istenen alanlar ve süperçoklular belirlenir.
  - Eylem için standart kuantum alan teorisinden bilinen, kinetik terimler ve renormalize edilebilir en genel kütle ve etkileşme terimleri yazılır.
  - Eylemdeki bu terimlerin katsayıları süpersimetri altında değişmez kalma şartıyla kısıtlanır.

Süpersimetrik bir teorinin eylemi iki farklı yolla yazılabilir.

- Bileşen (component) alan formülasyonu :
  - Eylemin sahip olması istenen alanlar ve süperçoklular belirlenir.
  - Eylem için standart kuantum alan teorisinden bilinen, kinetik terimler ve renormalize edilebilir en genel kütle ve etkileşme terimleri yazılır.
  - Eylemdeki bu terimlerin katsayıları süpersimetri altında değişmez kalma şartıyla kısıtlanır.
- Süperuzay formülasyonu :
  - QFT : Bildiğimiz 4 boyutlu uzay x_μ Poincare/Lorentz koset uzayını parametrize ediyor.
  - SUSY QFT : O zaman SuperPoincare/Lorentz koset uzayı $(x_\mu\,, \theta_\alpha\,, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}) \Rightarrow$ 4+4 boyutlu *SUPERUZAY*ı parametrize eder ! :
  - Süpersimetrik eylemler doğrudan bu koordinatların fonksiyonları olan süperalanlar $\Phi(x, \theta, \bar{\theta})$ yardımıyla yazılır.

1-Boyutlu Süpersimetrik Model

t-ile parametrize edilen 1-boyutlu uzayda,

- $\phi(t)$ bir bozonik alan
- $\psi(t)$ bir fermiyonik alan

olsun. $\psi(t)$, her bir t için bağımsız bir Grassmann değişkendir :

$$\psi(t_1)\psi(t_2) = -\psi(t_2)\psi(t_1) \Rightarrow (\psi(t))^2 = 0$$

Eğer $d\psi(t)/dt \equiv \dot{\psi}(t)$ varsa benzer şekilde

$$\dot{\psi(t_1)}\dot{\psi(t_2)} = -\dot{\psi(t_2)}\dot{\psi(t_1)}\,,\; \dot{\psi(t)}\psi(t) = -\psi(t)\dot{\psi(t)}$$

ψ ve ϕ alanlarının matematiksel olarak birbirinden farkı

$$\int dt\psi(t)\dot{\psi}(t) \neq \int dt\frac{d}{dt}(\psi(t)(\psi(t))$$

ifadesinden görülebilir.

Modeli basitleştirmek için ϕ ve ψ'yi reel alalım : $(\phi)^\dagger = \phi$, $(\psi)^\dagger = \psi$ Bu modelin eylemi,

$$I = \int dt \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{i}{2}\psi\dot{\psi} \right)$$

şeklinde yazılır. Eylemin hermitsel olduğu ($I^\dagger = I$) kolayca görülebilir.
Fiziksel intermezzo : Bu eylemde

- $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ terimi, 4-boyutta Klein-Gordon eyleminin (x, y, z)'den bağımsız bir alana indirgenmesi,
- $\frac{i}{2}\psi\dot{\psi}$ terimi, reel Majarona spinorü için yazılan Dirac eyleminin bu spinörün bir bileşenine indirgenmesi

gibi düşünülebilir !
Doğal birim sisteminde ($\hbar = c = 1$) eylem boyutsuz ($[I] = 0$) ve $[t] = -1$ olduğundan eylemdeki alanların boyutları

$$[\phi] = -\frac{1}{2}\, , \, [\psi] = 0$$

olur.

δ_ξ, parametresi reel SABİT Grassmann bir değişken ξ olan süpersimetri dönümü olsun. Tanım olarak,

$$\begin{aligned} \delta_\xi(\textit{bozonik bir ifade}) &= \xi(\textit{fermionik bir ifade}) \\ \delta_\xi(\textit{fermionik bir ifade}) &= \xi(\textit{bozonik bir ifade}) \end{aligned}$$

olmalı.

- $\delta_\xi \phi = i\xi\psi$ olsun. O zaman $[\xi] = -1/2$ olmalıdır.
- Ancak benzer şekilde boyutsal nedenlerden $\delta_\xi \psi = i\xi\phi$ yazılamaz. Dolayısıyla $\delta_\xi \psi = \xi f(\phi)$ yazalım.

δ_ξ, parametresi reel SABİT Grassmann bir değişken ξ olan süpersimetri dönümü olsun. Tanım olarak,

$$\begin{aligned} \delta_\xi(\textit{bozonik bir ifade}) &= \xi(\textit{fermionik bir ifade}) \\ \delta_\xi(\textit{fermionik bir ifade}) &= \xi(\textit{bozonik bir ifade}) \end{aligned}$$

olmalı.

- $\delta_\xi \phi = i\xi\psi$ olsun. O zaman $[\xi] = -1/2$ olmalıdır.
- Ancak benzer şekilde boyutsal nedenlerden $\delta_\xi \psi = i\xi\phi$ yazılamaz. Dolayısıyla $\delta_\xi \psi = \xi f(\phi)$ yazalım.
- Boyutsal analiz yapılırsa $[f(\phi)] = 1/2$ olmalıdır.
  Ancak eğer süpersimetri dönüşümü lineer alınırsa olası tek çözüm $f(\phi) \sim \xi\dot{\phi}$ şeklinde bulunur.

δ_ξ, parametresi reel SABİT Grassmann bir değişken ξ olan süpersimetri dönümü olsun. Tanım olarak,

$$\begin{aligned} \delta_\xi(\textit{bozonik bir ifade}) &= \xi(\textit{fermionik bir ifade}) \\ \delta_\xi(\textit{fermionik bir ifade}) &= \xi(\textit{bozonik bir ifade}) \end{aligned}$$

olmalı.

- $\delta_\xi \phi = i\xi\psi$ olsun. O zaman $[\xi] = -1/2$ olmalıdır.
- Ancak benzer şekilde boyutsal nedenlerden $\delta_\xi \psi = i\xi\phi$ yazılamaz. Dolayısıyla $\delta_\xi \psi = \xi f(\phi)$ yazalım.
- Boyutsal analiz yapılırsa $[f(\phi)] = 1/2$ olmalıdır. Ancak eğer süpersimetri dönüşümü lineer alınırsa olası tek çözüm $f(\phi) \sim \xi\dot{\phi}$ şeklinde bulunur.
- Aradaki orantı sabiti $\delta_\xi I = 0$ olacak şekilde seçilirse

$$\delta_\xi \psi = -\xi\dot{\phi}$$

elde edilir.

Özet olarak :

- $\delta_\xi \phi = i\xi\psi \, , \, \delta_\xi \psi = -\xi\dot{\phi}$ süpersimetri dönüşümleri.
- $I = \int dt \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{i}{2}\psi\dot{\psi} \right)$ bu dönüşümler altında değişmez kalan (süpersimetrik) eylem.
- $(\phi \, , \, \psi)$ reel skaler süpersimetri multipleti elde edilir.
- Dikkat edilirse süpersimetrik bu modeldeki bozon sayısı (1) fermiyon sayısına (1) eşittir.

Süpersimetri Cebri

Süpersimetri cebrini elde etmek için iki kez süpersimetri dönüşümü uygulanırsa,

$$[\delta_\eta, \delta_\xi]\phi = (\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta)\phi = 2i\eta\xi\dot{\phi}$$

$$[\delta_\eta, \delta_\xi]\psi = 2i\eta\xi\dot{\psi}$$

elde edilir.Dolayısıyla yukarıdaki komutatörler en genel bir ifade için

$$[\delta_\eta, \delta_\xi] = 2i\eta\xi\left(\frac{d}{dt}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Görüldüğü gibi komütatörün sağ tarafı t-uzayında mesafesi $t_0 = 2i\eta\xi$ olan ötelemelere karşılık gelmektedir !

Süpersimetri cebrini jeneratörler cinsinden kısa yoldan görmek için bir hile yapalım :

$$i\frac{d}{dt} \equiv H \,,\ \delta_\xi \equiv i\xi Q \,,\ \delta_\eta \equiv i\eta Q$$

olsun. Burada H ve Q sırasıyla öteleme ve süpersimetri jeneratörlerini temsil etmektedir.
Yukarıdaki komutatör

$$[\delta_\eta, \delta_\xi] = -(\xi Q\eta Q - \eta Q\xi Q) = \xi\eta(QQ + QQ) = \xi\eta\{Q, Q\}$$

şeklinde Q'ların anti-komütatörü olarak yazılabilir.Bu anti-komütatör yukarıdaki tanımlar yardımıyla

$$\{Q, Q\} = 2H$$

yazılır ve daha sonra Jacobi özdeşliği kullanılırsa

$$[Q, H] = 0$$

komütatör bağıntısı elde edilir.

Dolayısıyla 1-boyutta süpersimetri cebri

$$\{Q, Q\} = 2H \ , \ [H, Q] = 0 \ , \ [H, H] = 0$$

şeklinde yazılır.

Dolayısıyla 1-boyutta süpersimetri cebri

$$\{Q, Q\} = 2H \ , \ [H, Q] = 0 \ , \ [H, H] = 0$$

şeklinde yazılır.

- Cebir ancak hem komütatörler hem de anti-komütatörler kullanılarak yazılabilir

Dolayısıyla 1-boyutta süpersimetri cebri

$$\{Q, Q\} = 2H \ , \ [H, Q] = 0 \ , \ [H, H] = 0$$

şeklinde yazılır.

- Cebir ancak hem komütatörler hem de anti-komütatörler kullanılarak yazılabilir
- Dolayısıyla Q ve H jeneratörleri kapalı dereceli (graded) Lie cebri oluşturur.

Dolayısıyla 1-boyutta süpersimetri cebri

$$\{Q, Q\} = 2H \ , \ [H, Q] = 0 \ , \ [H, H] = 0$$

şeklinde yazılır.

- Cebir ancak hem komütatörler hem de anti-komütatörler kullanılarak yazılabilir
- Dolayısıyla Q ve H jeneratörleri kapalı dereceli (graded) Lie cebri oluşturur.
- Bu basit modelde cebrin kapanması için alanların hareket denklemlerinin kullanılmasına gerek yoktur (off-shell susy).

Kohomolojik yapı

d Karesi sıfır olan bir operatör olsun.

$$d^2 = 0$$

Böyle bir operatörü sıfır yapan çözüm kümesi, örneğin $dA = 0$, bir kohomoloji problemi oluşturur. Bu problemin enteresan çözümleri

$$dA = 0\ ,\ \ A \neq dB$$

şeklinde olan çözümlerdir. Benzer tarzda problemler fizikte de önemli bir yer tutar.

Benzer yapı 1-boyutlu basit modelde de görülebilir. Süpersimetri cebrinde $\{Q, Q\} = 2H = 2id/dt$ olduğundan

$$QQ = i\frac{d}{dt}$$

elde edilir. Eğer Q'nun etki ettiği uzay integre edilmiş alan polinomlarına, örneğin $A = \int dtF(\phi, \psi)$ kısıtlanırsa Q'nun bu uzayda karesi sıfır (nilpotent) olduğu görülür :

$$QQ\int dtF(\phi,\psi) = i\int dt\frac{d}{dt}\left(F(\phi,\psi)\right) \approx 0$$

Modelin eylemi ise bir tam Q dönüşümü olarak yazılabilir.

$$I = \int dt\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{i}{2}\psi\dot{\psi}\right) = -\frac{1}{2}Q\int dt\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}\psi\right)$$

4-boyutta benzer ifadeler topolojik alan teorilerine karşılık gelmektedir. Bir boyutta bu sonucun yoğun madde fiziğinde nasıl bir uygulaması olacağının araştırılması ilginç olabilir!

Grassmann Cebri

$\theta_i\,, i = 1, 2 \cdots n$ n Grassmann sayısı olsun. Grassmann sayıları Grassmann cebrini

$$\theta_i\theta_j + \theta_j\theta_i = 0\,, \forall\, i, j \rightarrow \theta_i\theta_i = 0$$

sağlar. Türev ve integral

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}\theta_j = \delta_{ij}\ ,\ \int d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_n \theta_n \cdots \theta_2\theta_1 = 1$$

şeklinde tanımlanır. Görüldüğü gibi integral türev gibi çalışmaktadır !
Tek bir Grassmann parametresi θ için yukarıdaki ifadeler oldukça basitleşir :

$$\int d\theta\theta = 1\,, \int d\theta c = 0 \rightarrow \int d\theta \equiv \frac{d}{d\theta}$$

Süperuzay

Süperuzay SuperPoincare/Lorentz koset uzayinin parametrizasyonu. Bu ne demek ? SuperPoincare grubu süpersimetri+dönme + ötelemeleri içerir. Lorentz ise sadece dönmeleri içerir. İkisinin koseti alınırsa sadece süpersimetri + öteleme kalır.
Dolayısıyla bir boyutta sadece Q ve H olduğundan bu uzay θ ve t koordinatları ile parametrize edilebilir. Burada θ'nin antikomüt eden (Grassmann) bir koordinat olduğu aşikardır.

TANIM:

- Koordinatları t ve θ olan uzaya SÜPERUZAY denir.
- t ve θ'nın bir fonksiyonu olan herhangi bir alana (örneğin $\Phi(t,\theta)$) SÜPERALAN denir.

O zaman $\theta^2 = 0$ olduğundan bizim modelimizde en basit süperalan,

$$\Phi(t, \theta) = \phi(t) + i\theta\psi(t)$$

şeklinde yazılabilir.

O zaman $\theta^2 = 0$ olduğundan bizim modelimizde en basit süperalan,

$$\Phi(t, \theta) = \phi(t) + i\theta\psi(t)$$

şeklinde yazılabilir.

- $\phi(t)$ reel skaler bir alan olduğundan uniform bir süperalan yazmak için

O zaman $\theta^2 = 0$ olduğundan bizim modelimizde en basit süperalan,

$$\Phi(t, \theta) = \phi(t) + i\theta\psi(t)$$

şeklinde yazılabilir.

- $\phi(t)$ reel skaler bir alan olduğundan uniform bir süperalan yazmak için
- Φ'nin tüm bileşenleri skaler olmalıdır. θ Grassmann sayısı olduğundan ψ komüt etmeyen bir alan olmalıdır.

O zaman $\theta^2 = 0$ olduğundan bizim modelimizde en basit süperalan,

$$\Phi(t, \theta) = \phi(t) + i\theta\psi(t)$$

şeklinde yazılabilir.

- $\phi(t)$ reel skaler bir alan olduğundan uniform bir süperalan yazmak için
- Φ'nin tüm bileşenleri skaler olmalıdır. θ Grassmann sayısı olduğundan ψ komüt etmeyen bir alan olmalıdır.
- Φ'nin tüm bileşenleri reel olmalıdır. Dolayısıyla $\theta\psi$ teriminin başında i olmalıdır.

O zaman $\theta^2 = 0$ olduğundan bizim modelimizde en basit süperalan,

$$\Phi(t, \theta) = \phi(t) + i\theta\psi(t)$$

şeklinde yazılabilir.

- $\phi(t)$ reel skaler bir alan olduğundan uniform bir süperalan yazmak için
- Φ'nin tüm bileşenleri skaler olmalıdır. θ Grassmann sayısı olduğundan ψ komüt etmeyen bir alan olmalıdır.
- Φ'nin tüm bileşenleri reel olmalıdır. Dolayısıyla $\theta\psi$ teriminin başında i olmalıdır.
- $[\Phi] = [\phi] = -1/2$ olmalıdır. Dolayısıyla $[\psi] = 0$ olduğundan $[\theta] = -1/2$ olmalıdır.

Süpesimetri dönüşümleri süperuzayda,

$$Q = \frac{\partial}{\partial\theta} + i\theta\frac{\partial}{\partial t}$$

operatörü yardımıyla üretilir :

$$\xi Q\Phi = \xi\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\theta\frac{\partial}{\partial t}\right)\Phi = i\xi\psi + i\theta(-\xi\dot{\phi}) = \delta\phi + i\theta\delta\psi$$

Bu operatör süpersimetri cebrini sağlar :

$$\{Q, Q\} = 2i\frac{\partial}{\partial t} \equiv H\,,\; [Q, H] = 0\,,\; [H, H] = 0$$

Süpersimetri donüşümleri Q ile üretildiğinden bir süper eylemin bu dönüşümler altında değişmez kalma şartı

$$\delta I = \int dt d\theta \xi Q[\cdots] = 0$$

olarak elde edilir.
Dolayısıyla ξQ ile komüt eden diğer operatörlerin yazılması önemlidir. Bunlardan bir tanesi d/dt'dir. Bir başka türev operatörü ise kovaryant türev D'dir:

$$D = \frac{\partial}{\partial \theta} - i\theta \frac{\partial}{\partial t}$$

Tanımdan da doğrudan görülebileceği gibi D,

$$[\xi Q, D] = \xi \{Q, D\} = 0$$

ilişkisini sağlar.

Eylemi oluşturmak için *olsa olsa ne olur* yöntemini kullanalım. Eylem en genelde,

$$I = \int dt d\theta F(\frac{\partial}{\partial t}, D, \Phi)$$

olarak yazılabilir.

Eylemi oluşturmak için *olsa olsa ne olur* yöntemini kullanalım. Eylem en genelde,

$$I = \int dtd\theta F(\frac{\partial}{\partial t}, D, \Phi)$$

olarak yazılabilir.

- Boyut analizi yaparsak $[dtd\theta] = -1/2$ olduğu görülebilir. Dolayısıyla eylemin boyutsuz olması icin $[F] = 1/2$ olmalıdır.

Eylemi oluşturmak için *olsa olsa ne olur* yöntemini kullanalım. Eylem en genelde,

$$I = \int dtd\theta F(\frac{\partial}{\partial t}, D, \Phi)$$

olarak yazılabilir.

- Boyut analizi yaparsak $[dtd\theta] = -1/2$ olduğu görülebilir. Dolayısıyla eylemin boyutsuz olması icin $[F] = 1/2$ olmalıdır.
- Fiziksel olarak enteresan bir eylem en azından alanlar cinsinden kuadratik olmalıdır. Böylelikle

$$F = K(\frac{\partial}{\partial t}, D).\Phi^2$$

gibi yazılabilir.

Eylemi oluşturmak için *olsa olsa ne olur* yöntemini kullanalım. Eylem en genelde,

$$I = \int dt d\theta F(\frac{\partial}{\partial t}, D, \Phi)$$

olarak yazılabilir.

- Boyut analizi yaparsak $[dtd\theta] = -1/2$ olduğu görülebilir. Dolayısıyla eylemin boyutsuz olması icin $[F] = 1/2$ olmalıdır.
- Fiziksel olarak enteresan bir eylem en azından alanlar cinsinden kuadratik olmalıdır. Böylelikle

$$F = K(\frac{\partial}{\partial t}, D).\Phi^2$$

gibi yazılabilir.
- $[\Phi] = -1/2$ olduğundan K'nın boyutu ancak $[K] = 3/2$ olabilir. Görüldüğü gibi sadece boyut analizi ile K'nın TEK çözümü

$$K \sim \frac{\partial}{\partial t}.D$$

olmalıdır.

- 1-boyutta, 4-boyuttan farklı olarak yine boyut analizi kullanarak türev içermeyen ayrı bir potansiyel teriminin (Φ^3, Φ^4 gibi) yazılamayacağı görülür !

- 1-boyutta, 4-boyuttan farklı olarak yine boyut analizi kullanarak türev içermeyen ayrı bir potansiyel teriminin (Φ^3, Φ^4 gibi) yazılamayacağı görülür !
- Eger eylemde ikiden fazla türev içeren terimler istenmiyorsa eylem için α bir sabit olmak üzere sadece TEK BİR ÇÖZÜM elde edilebilir.

$$I = \alpha \int dt d\theta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) . (D\Phi)$$

- 1-boyutta, 4-boyuttan farklı olarak yine boyut analizi kullanarak türev içermeyen ayrı bir potansiyel teriminin (Φ^3, Φ^4 gibi) yazılamayacağı görülür !
- Eger eylemde ikiden fazla türev içeren terimler istenmiyorsa eylem için α bir sabit olmak üzere sadece TEK BİR ÇÖZÜM elde edilebilir.

$$I = \alpha \int dtd\theta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right).(D\Phi)$$

- Bu ifadede $\alpha = i/2$ için

$$\begin{aligned} I &= \frac{i}{2}\int dtd\theta \left(\dot{\phi} + i\theta\dot{\psi}\right)\left(i\psi - i\theta\dot{\phi}\right) = 0 + \frac{i}{2}\int dtd\theta \left(-i\theta\dot{\phi}\dot{\phi} + \theta\psi\dot{\psi}\right) + 0 \\ &= \int dtd\theta \left(\frac{1}{2}\theta\dot{\phi}\dot{\phi} + \frac{i}{2}\psi\dot{\psi}\right) \end{aligned}$$

- 1-boyutta, 4-boyuttan farklı olarak yine boyut analizi kullanarak türev içermeyen ayrı bir potansiyel teriminin (Φ^3, Φ^4 gibi) yazılamayacağı görülür !
- Eger eylemde ikiden fazla türev içeren terimler istenmiyorsa eylem için α bir sabit olmak üzere sadece TEK BİR ÇÖZÜM elde edilebilir.

$$I = \alpha \int dtd\theta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right).(D\Phi)$$

- Bu ifadede $\alpha = i/2$ için

$$\begin{aligned} I &= \frac{i}{2}\int dtd\theta \left(\dot{\phi} + i\theta\dot{\psi}\right)\left(i\psi - i\theta\dot{\phi}\right) = 0 + \frac{i}{2}\int dtd\theta \left(-i\theta\dot{\phi}\dot{\phi} + \theta\psi\dot{\psi}\right) + 0 \\ &= \int dtd\theta \left(\frac{1}{2}\theta\dot{\phi}\dot{\phi} + \frac{i}{2}\psi\dot{\psi}\right) \end{aligned}$$

- Bu ifade ise daha once superuzay tekniklerini kullanmadan bulduğumuz süpersimetrik eylemdir. Ancak görüldüğü gibi süperuzayda eylem çok daha basitçe elde edilebildi !

Genişletilmiş Süpersimetri

Bir boyutta birden çok süpersimetri olduğunu düşünelim. Eğer N–tane süpersimetri varsa her bir süpersimetriye karşılık bir süpersimetri üreteci olmalı : Q^i , $i = 1, 2, \cdots, N$. Bu durumda

$$\delta_\xi \phi = \xi_i Q_i \phi = i \sum_{i=1}^{N} \xi_i \psi_i \quad , \quad \delta_\xi \psi_j = \xi_i Q_i \psi_j = -\xi_j \dot{\phi} \tag{1}$$

Elde edilir ve aşağıdaki eylem

$$I = \int dt \left(\frac{1}{2} \dot{\phi} \dot{\phi} - \frac{i}{2} \sum_{i=1}^{N} \psi_i \dot{\psi}_i \right) \tag{2}$$

bu genişletilmiş süpersimetri altında değişmez kalır.

Ancak dikkat edilirse Q^i üreteçleri bir skaler alandan N–tane fermiyon alanı ψ_i üretmekte yani model bu haliyle bir bozona karşılık N fermiyon içermekte.
N=2 durumunda süpersimetri cebirini inceleyelim. İki süpersimetri üretecinin komütatörü ϕ'ye etki ettiğinde N=1 durumunda olduğu gibi yine ötelemeler üzerine kapanır :

$$[\delta_\xi, \delta_\eta]\phi = 2i(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2)\dot{\phi}$$

Ancak, örneğin aynı işlemi ψ_1'e uygularsak

$$[\delta_\xi, \delta_\eta]\psi_1 = 2i\xi_1\eta_1\dot{\psi}_1 + i(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)\dot{\psi}_2 \qquad (3)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi cebrin sadece ötelemeler üzerine kapanmasını istersek

$$\dot{\psi}_2 = 0 \qquad (4)$$

olmalıdır. Bu ise (2) ile verilen eylemden görülebileceği gibi ψ_2 alanının hareket denklemidir. Benzer ilişki ψ_2 alanı için $\dot{\psi}_1 = 0$ şartı kullanılarak elde edilir.

Tanım : Eğer süpersimetri cebri sadece hareket denklemleri kullanılarak ötelemeler üzerine kapanıyorsa, bu süpersimetri **kabuk üstü (on-shell) süpersimetri** olarak adlandırılır.
Yukarıda verilen kabuk üstü süpersimetrik modelde iki fermiyon alanı ψ_1, ψ_2 ve bir bozon alanı var. Her ne kadar hareket denklemleri yardımıyla bir fermiyonik serbestlik derecesinden kurtularak fermiyon ve bozon sayılarının eşit olduğunu düşünebilirsek, eğer hareket denklemlerini kullanmadan süpersimetri cebirinin kapanmasını hem de fermiyon bozon sayılarını eşitlemek istersek, bir adet bozonik alanı teoriye sokmak zorunda olduğumuz görülür.

Bu amaçla bir bozonik alan F'i modele eylem

$$I_k = \int dt \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}\dot{\phi} - \frac{i}{2}\psi_i\dot{\psi}_i + \frac{1}{2}F^2 \right) \tag{5}$$

olacak şekilde ekleyelim. Dikkat edilirse, F için bir kinetik terim olmadığından, F'nin hareket denklemi $F = 0$ şeklindedir. Yani denklem türev içermeyen cebirsel bir denklemdir. Bu cins alanlar **dış (auxiliary) alan** olarak adlandırılır.

ÖDEV

Yukarıdaki örnek bir (ϕ, ψ_1) olan diğeri (ψ_2, F) olana iki ayrı çokludan elde edilebilir.

- Bu iki çoklu için süpersimetri dönüşümlerini bulun.
- Her bir çoklu için ayrı ayrı eylemleri bulun ve bu iki eylemin toplamının Denk.(5)'i verdiğini gösterin.

Bir boyutta elde edilen N=2 süpersimetrik modeli doğrudan da inşa etmek mümkündür. N=1 durumunda olduğu gibi alanların boyutları incelenerek aşağıdaki dönüşümler yazılabilir :

$$\delta\phi = i\xi_i\psi_i \quad , \quad \delta\psi_i = \xi_i\dot{\phi} + \alpha_{ij}\xi_j F \quad , \quad \delta F = i\xi_i\beta_{ij}\dot{\psi}_j \tag{6}$$

Burada α ve β gerçel (reel) matrislerdir. Komütatör cebri yazılırsa

$$[\delta_\xi, \delta_\eta]\phi = 2i\eta_i\xi_i\dot{\phi} + (i\eta_i(\alpha_{ij} + \alpha_{ji})\xi_j F)$$

$$[\delta_\xi, \delta_\eta]\psi_i = i(\eta_i\xi_j - \xi_i\eta_j)\dot{\psi}_j + i\alpha_{ij}\beta_{kl}(\eta_j\xi_k - \xi_j\eta_k)\dot{\psi}_l$$

$[\delta_\xi, \delta_\eta]$'nın ötelemeler üzerine kapanması için

$$\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 0 \quad , \quad \alpha_{ij}\beta_{jk} = \delta_{ik}$$

olması gerektiği bulunur.

ÖDEV:

- (5) ile verilen I_k eyleminin (**??**) dönüşümleri altında değişmez olduğunu gösterin.
- m alanların kütlesi ise

$$I_m = -m \int dt \, (F\phi + i\psi_1\psi_2)$$

şeklinde bir kütle terimi yazılabileceğini gösterin.

- g bir etkileşme (çiftlenim–coupling) sabiti ise

$$I_g = g \int dt \left(\frac{1}{2} F\phi^2 + i\psi_1\psi_2\phi \right)$$

şeklinde bir etkileşme terimi yazılabileceğini gösterin.

- $I = I_k + I_m + I_g$ ile verilen eylemde F dış alanını hareket denklemleri yardımı ile yok ederek kabuk-üstü eylemi bulun. Bu eylemin kabuk–üstü süpersimetri dönüşümleri altında değişmez kalacağını gösterin.

ÖDEV:

Bir boyutta N=2 süpersimetri dönüşümleri $\delta_\xi = \xi_1 Q_1 + \xi_2 Q_2$ şeklinde yazılabilir.

$$Q = \frac{Q_1 + iQ_2}{\sqrt{2}} \quad , \quad \bar{Q} = \frac{Q_1 - iQ_2}{\sqrt{2}} \quad , \quad \psi = \frac{\psi_1 + i\psi_2}{\sqrt{2}} \quad , \quad \bar{\psi} = \frac{\psi_1 - i\psi_2}{\sqrt{2}}$$

şeklinde yeni bir tanım yaparak,

- $\phi, \psi, \bar{\psi}, F$ çoklusunun elemanlarının Q ve $\bar{Q}$ dönüşümlerini yazın.
- Alanların ve parametrelerin boyut analizini kullanarak kinetik, kütle ve etkileşme terimlerini içeren eylemin

$$I = \int dt \left[-(\bar{Q}Q)^2 \phi^2 + \bar{Q}Q \left(\frac{m}{2}\phi^2 + \frac{g}{3!}\phi^3 \right) \right]$$

  şeklinde elde edilebileceğini gösterin.

Kaynaklar :

1-boyutta süpersimetri için anlatılanların hemen hemen tamamı için

- P. van Nieuwenhuizen "Supersymmetry, Supergravity, Superspace and BRST Symmetry in a Simple Model" arXiv: hep-th/0408179

4–boyut için standart kaynak :

- Wess and Bagger, "Supersymmetry and Supergravity", (1992).

Görece daha yeni ve güncel kitaplar :

- Dine, "SUPERSYMMETRY AND STRING THEORY Beyond the Standard Model" (2007).
- Terning, "Modern Supersymmetry Dynamics and Duality" (2006).

Güzel bir giriş kitabı :

- Aitchison, "SUPERSYMMETRY IN PARTICLE PHYSICS – An Elementary Introduction" (2007).